

First Term Examination, 2016-17**Subject : Mathematics****Class : XII****Time : 3 Hrs.]****[M. M. : 100****General Instructions :**

- (i) All questions are compulsory.
- (ii) Questions 1-4 in section A carrying 1 mark each.
- (iii) Questions 5-12 in section B carrying 2 marks each.
- (iv) Questions 13-23 in section C carrying 4 marks each.
- (v) Questions 24-29 in section D carrying 6 marks each.

सामान्य निर्देश—

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (ii) खण्ड अ के प्रश्न 1-4 के लिए 1 अंक निर्धारित है।
- (iii) खण्ड ब के प्रश्न 5-12 के लिए 2 अंक निर्धारित हैं।
- (iv) खण्ड स के प्रश्न 13-23 के लिए 4 अंक निर्धारित हैं।
- (v) खण्ड द के प्रश्न 24-29 के लिए 6 अंक निर्धारित हैं।

Section-A**खण्ड-अ**

1. * is a binary operation on Z , if $a*b = a + b - ab$, find the value of $4*3$.

*समुच्चय Z पर एक द्विआधारी संक्रिया है, यदि $a*b = a + b - ab$, तो $4*3$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. If A is a square matrix of order 3 and $|A| = 5$, find $|2 \text{adj } A|$

यदि A , 3 कोटि का वर्गाकार आव्यूह है और $|A| = 5$, $|2 \text{adj } A|$ ज्ञात कीजिए।

3. If $\begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 20$, find the value of x .

यदि $\begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 20$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

4. Evaluate: $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$.

मान ज्ञात कीजिए—

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx$$

Section-B

खण्ड-ब

5. Let $f: \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{3, 4, 5, 9\}$ and $g: \{3, 4, 5, 9\} \rightarrow \{7, 11, 15\}$ be the functions defined as $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = f(5) = 5$ and $g(3) = g(4) = 7$ and $g(5) = g(9) = 11$ find $g \circ f$

यदि $f: \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{3, 4, 5, 9\}$ और $g: \{3, 4, 5, 9\} \rightarrow \{7, 11, 15\}$ दो फलन हैं और $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = f(5) = 5$ और $g(3) = g(4) = 7$ और $g(5) = g(9) = 11$, $g \circ f$ ज्ञात कीजिए।

6. Prove that: $\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4} \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4} \sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

सिद्ध कीजिए: $\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4} \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4} \sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

7. If $\begin{bmatrix} a+10 & b^2+2b \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a+4 & 3 \\ 0 & b^2-5b \end{bmatrix}$ then find a and b .

यदि $\begin{bmatrix} a+10 & b^2+2b \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a+4 & 3 \\ 0 & b^2-5b \end{bmatrix}$ तो a और b का मान ज्ञात कीजिए।

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \text{adj } A \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot |A| = \text{adj } A$$

8. Find the value of x such that $[1 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0$.

x का मान ज्ञात कीजिए जबकि $[1 \ x \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0$.

9. Using differential, find the approximate value of $\sqrt{26}$.

अवकलन का प्रयोग करके $\sqrt{26}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

10. If $y = \sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$, find $\frac{dy}{dx}$.

यदि $y = \sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

11. Evaluate: $\int \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4} dx$.

ज्ञात कीजिए: $\int \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4} dx$.

12. Using properties of definite integrals, evaluate:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

निश्चित समाकलन के गुणधर्मों का प्रयोग करते हुए ज्ञात कीजिए: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

$\cos^2 x = \frac{2\cos^2 x - 1 + 1}{2}$

Section-C

खण्ड-स

13. Prove that : $\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$.

सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

14. Find inverse of $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ using elementary transformations.

प्रारम्भिक संक्रियाओं के प्रयोग से आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

15. Using properties of determinants, show that

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ba & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + 1$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके दर्शाइए :

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ba & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + 1$$

16. If $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, find the value of $\frac{d^2y}{dx^2}$.

यदि $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

OR (अथवा)

If $x^p y^q = (x + y)^{p+q}$, prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

यदि $x^p y^q = (x + y)^{p+q}$, सिद्ध कीजिए $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

17. Find the intervals in which $f(x) = \sin x - \cos x$, $0 < x < 2\pi$, is strictly increasing or strictly decreasing.

अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $f(x) = \sin x - \cos x$, $0 < x < 2\pi$, निरंतर वर्धमान या ह्रसमान हों।

OR (अथवा)

Find the equation of the normal to the curve $x^2 = 4y$ which passes through the point (1, 2).

वक्र $x^2 = 4y$ के किसी बिन्दु पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2) से होकर जाता है।

18. Evaluate $\int \frac{3x+1}{2x^2-2x+3} dx$.

मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{3x+1}{2x^2-2x+3} dx$.

19. Solve the differential equation : $\frac{dy}{dx} + y \cot x = x^2 \cot x + 2x$; $y(\pi/2) = 0$

अवकलन समीकरण को हल कीजिए : $\frac{dy}{dx} + y \cot x = x^2 \cot x + 2x$; $y(\pi/2) = 0$

20. Form the differential equation of all circles which touch the x-axis at origin.

उन सभी वृत्तों, जो x-अक्ष को शून्यक पर स्पर्श करते हैं, का अवकलन समीकरण ज्ञात कीजिए।

OR (अथवा)

Solve the differential equation : $x^2 dy + (xy + y^2) dx = 0$, given that $y = 1$ when $x = 1$.

अवकलन समीकरण को हल कीजिए : $x^2 dy + (xy + y^2) dx = 0$ दिया है $y = 1$ जबकि $x = 1$.

21. Verify Lagrange's Mean Value Theorem for the following function in the given interval and find 'c'.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x \text{ in } [1, 3]$$

फलन $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ को अंतराल $[1, 3]$ के लिए लैगरान्ज की मध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए।

22. Find the values of a and b such that the function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{if } x \leq 2 \\ ax + b & \text{if } 2 < x < 10 \\ 21 & \text{if } x \geq 10 \end{cases} \text{ is a continuous function.}$$

a तथा b का मान ज्ञात कीजिए यदि फलन

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{यदि } x \leq 2 \\ ax+b & \text{यदि } 2 < x < 10 \text{ संतत फलन हो।} \\ 21 & \text{यदि } x \geq 10 \end{cases}$$

23. Differentiate $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}\right)$, w. r. t., x $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}\right)$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Section-D

खण्ड-द

24. Find the area of region enclosed between the circles $x^2 + y^2 = 9$ and $(x-3)^2 + y^2 = 9$,
वृत्तों $x^2 + y^2 = 9$ तथा $(x-3)^2 + y^2 = 9$ के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

25. Evaluate: $\int_0^1 \cot^{-1}(1-x+x^2) dx$.

Evaluate: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$.

Or / अथवा

मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^1 \cot^{-1}(1-x+x^2) dx$.

मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$.

26. Perimeter of a rectangular sheet is given be 96 cm. A student is asked to write slogan on 'Save Water' on this sheet. What should be the dimensions of sheet so that he can use maximum area for slogan writing. Write importance of water in our life.

एक आयताकार गत्ते का परिमाण 96 cm है। एक विद्यार्थी को उस पर 'जल बचाओ' विषय पर लेख लिखनी है। गत्ते के टुकड़े की विमाएँ ज्ञात कीजिए जबकि गत्ते का अधिकतम क्षेत्रफल लिखने के लिए इस्तेमाल हो सके। 'जल का हमारे जीवन में महत्व' लिखिए।

27. If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ find A^{-1} and hence solve

$$x + 2y + 2z = 7$$

$$2x + y + z = 5$$

$$8x + 4y + 3z = 19$$

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, A^{-1} ज्ञात कीजिए अतः

$$x + 2y + 2z = 7$$

$$2x + y + z = 5$$

$$8x + 4y + 3z = 19 \text{ हल कीजिए।}$$

65
41
24

28. Consider the function $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow [-5, \infty)$ defined by $f(x) = 9x^2 + 6x - 5$ where \mathbb{R}_+ is the set of all non-negative real numbers. Show that f is invertible and find its inverse.

मान लीजिए फलन $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow [-5, \infty)$ द्वारा परिभाषित है जहाँ \mathbb{R}_+ एक गैर नकारात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। दर्शाइए कि f व्युत्क्रमणीय है और इसका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

29. A wire of length 28 m is to be cut into two pieces, one piece is bent into a circle and the other into a square. What should be the lengths of the pieces so that the combined area of the square and the circle is minimum.

एक 28 m लम्बे तार को दो टुकड़ों में विभक्त किया जाना है। एक टुकड़े से वर्ग तथा दूसरे से वृत्त बनाया जाता है। दोनों टुकड़ों की लम्बाई कितनी होनी चाहिए जिससे वर्ग एवं वृत्त का सम्मिलित क्षेत्रफल न्यूनतम हो।

OR (अथवा)

Show that the right circular cone of least curved surface area and given volume has an altitude equal to $\sqrt{2}$ times the radius of the base.

सिद्ध कीजिए कि न्यूनतम पृष्ठ का दिए आयतन के लम्ब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई, आधार की त्रिज्या की $\sqrt{2}$ गुणा हो।